FOURIERTRANSFORMATION

Die Fouriertransformation ist ein außerordentlich wichtiges Hilfsmittel in der Physik. So ist sie insbesondere bei der Behandlung der vollständigen Elektrodynamik höchst hilfreich.

[P23] *Übergang zum Integral*
Wir betrachten die Rechteckfuntkion, definiert als

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{wenn} \quad |x| > a \end{cases} \quad .$$

(a) Beginnen Sie mit dem vollständigen orthonormalen System $v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \exp(\mathrm{i}n\pi x/L)$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mit dem Sie periodische Funktionen im Intervall $x \in [-L, L]$ entwickeln können. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_n in der Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n(x)$.

(b) Bestimmen Sie nun die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \exp(-\mathrm{i}kx)$$

der Rechteckfunktion $f(x)$. Damit können Sie die ursprüngliche Funktion schreiben als

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \tilde{f}(k) \exp(\mathrm{i}kx) \,.$$

(c) Vergleichen Sie nun die Fourierreihe mit der Fouriertransformation. Führen Sie dazu in der Fourierreihe in geeigneter Weise eine Größe k_n ein. Zeigen Sie dann, dass die Fourierreihe für unendlich große Intervalllängen $L \to \infty$ in die Fouriertransformation übergeht.

[P24] *Coulomb-Potential*
Berechnen Sie die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials $V(r) = -e\Phi(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{-e^2}{r}$ (d.h. die Energie einer Punktladung $-e$ im elektrostatischen Potential $\Phi(r)$ einer Punktladung e), also

$$\tilde{V}(k) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \frac{-e^2}{r} \exp(-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) \,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie durch Ausintegrieren der Winkelvariablen ϑ und φ, dass die Fouriertransformierte eines Zentralpotentials $V(r) = V(|\vec{r}|)$ nur von $k = |\vec{k}|$ abhängt und in der Form

$$\tilde{V}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3 r \exp(-\mathrm{i}\vec{k} \cdot \vec{r}) V(r) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, r \sin(kr) V(r)$$

geschrieben werden kann.

(b) Beginnen Sie nun mit dem Yukawa-Potential $V(r) = \dfrac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\exp(-mr)}{r}$. Führen Sie Kugelkoordinaten ein und zeigen Sie, dass $\tilde{V}(k) = \dfrac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{4\pi}{k^2 + m^2}$ ist.

(c) Führen Sie nun den Grenzwert $m \to 0$ durch, um die Fouriertransformierte des Coulomb-Potentials zu erhalten. Warum scheitert die direkte Berechnung wie in (a)?

(d) Betrachten Sie die Poisson-Gleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\dfrac{e}{\epsilon_0} \delta(\vec{r})$ im Fourierraum, d.h., geben Sie die Fouriertransformation dieser Gleichung an. Erinnern Sie sich dafür an die Fouriertransformation der Diracschen δ-Distribution aus der Vorlesung (oder finden Sie sie) und bestimmen Sie damit die Lösung der Poisson-Gleichung für eine Punktladung im Fourierraum. Vergleichen Sie Ihr Resultat mir der Fouriertransformation des Coulomb-Potentials aus (c).